1. Übung Informatik II

Marcus Rickert

30. Dezember 1995

1. Aufgabe

Sei $c : M \to B^\ell$ ein Code der Länge ℓ, $h(c) \geq k+1$ die Hamminglänge dieses Codes und $w \in M$ ein beliebiges Codewort.

a) Ferner werden k verschiedene Bits von m umgeschaltet. Das nun entstandene Wort m' kann nicht Element von M sein, da sonst gelten würde: $d(m, m') = k < h(c) = k+1$, also ein Widerspruch zur vorausgesetzten Hamminglänge. Da der Empfänger aber alle Elemente von M kennt und m' nicht in M liegt, kann er m' als fehlerhaft feststellen.

b) Sei nun $h(c) \geq 2k+1$ und m' wie oben. Wie bereits erläutert kann dieses Wort als fehlerhaft erkannt werden. Der Empfänger kann nun versuchen, durch Umsetzen von höchstens k Bits von m' auf ein Element aus M zu kommen (er muß bis zu 2^k Möglichkeiten durchprobieren). Er findet auf jeden Fall eines, nämlich m, indem er die k Fehler der Übertragung rückgängig macht. Aber findet aber auch kein weiteres, denn dieses kann sich höchstens in $k + k = 2k$ Bits von m unterscheiden und darf deshalb nicht in M liegen, da sonst die Hamminglänge $h(c) = 2k$ wäre.

3. Aufgabe

a) Zur Eindeutigkeit

Sei $a \neq 0$ eine ganze Zahl und $(a_1, \ldots, a_r), (a'_1, \ldots, a'_r) \in \{0, \ldots, |b|-1\}^{r+1}$ mit $a_r, a'_r \neq 0$ zwei Darstellungen von a. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{r} (a_i - a'_i) b^k \qquad \text{mit} \qquad \underbrace{b < (a_i - a'_i) < -b}_{(*)} \\ \Longrightarrow 0 &= \underbrace{\frac{a_0 - a'_0}{b}}_{A} + \underbrace{\sum_{i=0}^{r} (a_k - a'_k) b^{k-1}}_{B} \end{aligned}$$

Der Term B ist ganzzahlig. Daher muß der Term A auch ganzzahlig sein. Wegen $(*)$ kann aber A dann nur null sein. Also gilt: $a_0 = a'_0$. Der Term B kann rekursiv für

a_1, a_1' bis a_k, a_k' weiterbehandelt werden, so daß gilt:

$$\bigwedge_{i \in \{0,\ldots k\}} a_i = a_i'$$

Also sind die beiden Darstellungen identisch.

b) Mächtigkeit von D_m

Die Mächtigkeit von D_m ergibt sich sofort aus der Überlegung, daß die m Koeffizienten a_0 bis a_{m-1} unabhängig voneinander gewählt werden können und jeder einzelne b verschiedene Werte annehmen kann. Man erhält: $|D_m| = b^m$ (bei diesen Darstellungen ist natürlich a_{m-1} nicht notwendigerweise ungleich null).

c) Die Mengen I_m

Betrachte folgende Definitionen:

$$\begin{array}{rrcl}
m=0 & I_0 & := & \{0\} \\
m=1 & I_1 & := & \{0,\ldots,|b|-1\} \\
\text{m gerade} & I_m & := & \{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i+1},\ldots,(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i}\} \\
\text{m ungerade} & I_m & := & \{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} b^{2i+1},\ldots,(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} b^{2i}\}
\end{array}$$

Verankerung $m = 0$

Bei $m = 0$ hat man keine Monome. Die einzige Zahl, die man darstellen kann ist die Null.

Verankerung $m = 1$

Bei $m = 1$ hat man ein Monom mit Exponent Null, also $b^0 = 1$. Der Koeffizient kann von 0 bis $|b| - 1$ variieren.

Induktionsschritt $m \to m + 1$ für m gerade

Für $m + 1$ ist der neue höchste Exponent $b^m > 0$. Das heißt man erhält als untere und obere Grenze für dieses Monom: $0 \leq a_i b^m \leq (|b| - 1)b^m$. Betrachtet man nun alle Möglichkeiten, die sich aus der Summation von dem neuen Monom $a_i b^m$ mit den alten $a_0 b^0 + \ldots + a_{m-1} b^{m-1}$ ergeben, so erhält man:

$$\begin{aligned}
f(D_{m+1}) &\subset I_m + \{0, b^m, \ldots, (|b|-1)b^m\} \\
&\subset \{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i+1},\ldots,(|b|-1)b^m + (|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i}\} \\
&= \{\sim,\ldots,(|b|-1)(b^m + \sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i})\} \\
&= \{\sim,\ldots,(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} b^{2i}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{(m+1)-3}{2}} b^{2i+1}, \ldots, (|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{(m+1)-1}{2}} b^{2i}\} \\
&= I_{m+1}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt $m \to m+1$ für m ungerade

Für $m+1$ ist der neue höchste Exponent $b^m < 0$. Das heißt man erhält als untere und obere Grenze für dieses Monom: $(|b|-1)b^m \leq a_i b^m \leq 0$. Betrachtet man nun alle Möglichkeiten, die sich aus der Summation von dem neuen Monom $a_i b^m$ mit den alten $a_0 b^0 + \ldots + a_{m-1} b^{m-1}$ ergeben, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
f(D_{m+1}) &\subset I_m + \{(|b|-1)b^m, \ldots, b^m, 0\} \\
&\subset \{(|b|-1)b^m + (|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} b^{2i+1}, \ldots, (|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} b^{2i}\} \\
&= \{(|b|-1)(b^m + \sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} b^{2i+1}), \ldots, \sim\} \\
&= \{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} b^{2i+1}, \ldots, \sim\} \\
&= \{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{(m+1)-2}{2}} b^{2i+1}, \ldots, (|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{(m+1)-2}{2}} b^{2i}\} \\
&= I_{m+1}
\end{aligned}
$$

d) Die Mächtigkeit von I_m

1. Fall m **gerade (**m **ungerade folgt entsprechend!)**

$$
\begin{aligned}
|I_m| &= \underbrace{-(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i+1}}_{neg. Zahlen} + \underbrace{(|b|-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i}}_{positive Zahlen} + \underbrace{1}_{null} \\
&= (b^2-1)\sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i} + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2(i+1)} - \sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2i} + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}} b^{2(i+1)} - (1 + \sum_{i=0}^{\frac{m-2}{2}-1} b^{2(i+1)}) + 1 \\
&= b^{2(\frac{m-2}{2}+1)}
\end{aligned}
$$

$$= \quad b^m$$

e) Folgerungen

Sei nun $a \neq 0$ eine ganze Zahl. Da für $i \to \infty$ das Maximum $max(I_{2i+1})$ monoton wachsend und das Minimum $min(I_{2i})$ monoton fallend ist, gibt es für $a < 0$ ein $m = 2i_0$ bzw. für $a > 0$ ein $m = 2i_0 + 1$, so daß $a \in I_m$ aber $a \notin I_{m-1}$. Die Eindeutigkeit sagt nun aus, daß die Abbildung $f : D_m \to I_m$ injektiv ist. Aus der Gleichheit von $|D_m|$ und $|I_m|$ folgt nun, daß f bijektiv ist. Also läßt sich eine eindeutige Darstellung $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in D_m$ finden, so daß $a = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i$. Da außerdem gilt $a \notin I_{m-1}$ und sich I_{m-1} und I_m nur durch die Potenzen von b^{m-1} unterscheiden, muß schon a_{m-1} ungleich null sein. Q.E.D.

2. Aufgabe

zu (i),(ii),(iii)

	$(\wedge, \neg)$	$(\oplus, \wedge, \neg)$	$(\vee, \neg)$
0	$x \wedge \overline{x}$	$x \wedge \overline{x}$	$\overline{x \vee \overline{x}}$
nor	$\overline{x} \wedge \overline{y}$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$	$\overline{x \vee y}$
$\nLeftarrow$	$\overline{x} \wedge y$	$\overline{x} \wedge y$	$\overline{x \vee \overline{y}}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x}$
$\nRightarrow$	$x \wedge \overline{y}$	$x \wedge \overline{y}$	$\overline{\overline{x} \vee y}$
$\overline{y}$	$\overline{y}$	$\overline{y}$	$\overline{y}$
xor	$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \wedge \overline{x \wedge y}$	$x \oplus y$	$\overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{x \vee \overline{y}}$
$nand$	$\overline{x \wedge y}$	$\overline{x \wedge y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
and	$x \wedge y$	$x \wedge y$	$\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$
$\Leftrightarrow$	$\overline{\overline{x} \wedge y} \wedge \overline{x \wedge \overline{y}}$	$\overline{x \oplus y}$	$\overline{x \vee y} \vee \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$
y	y	y	y
$\Rightarrow$	$\overline{x \wedge \overline{y}}$	$\overline{y \wedge \overline{y}}$	$\overline{x} \vee y$
x	x	x	x
$\Leftarrow$	$\overline{\overline{x} \wedge y}$	$\overline{\overline{x} \wedge y}$	$x \vee \overline{y}$
or	$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$	$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$	$x \vee y$
1	$\overline{x \wedge \overline{x}}$	$x \oplus \overline{x}$	$x \vee \overline{x}$

zu (iv),(v)

Es genügt zu zeigen, daß sich $(\wedge, \neg)$ durch *nand* bzw. $(\vee, \neg)$ durch *nor* erzeugen lassen.

$$\neg : B \to B \quad \text{mit} \quad \neg x := x \text{ nand } x$$
$$\wedge : B^2 \to B \quad \text{mit} \quad x \wedge y := (x \text{ nand } y) \text{ nand } (x \text{ nand } y)$$

bzw.

$$\neg : B \to B \quad \text{mit} \quad \neg x := x \text{ nor } x$$
$$\vee : B^2 \to B \quad \text{mit} \quad x \vee y := (x \text{ nor } y) \text{ nor } (x \text{ nor } y)$$